

Gruppenübung 13

Aufgabe 1 Gegeben sei das System

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x.$$

Berechnen Sie das Eingangssignal $u(t) = u_k e^{z_k t} h(t)$ (h ist die Heaviside-Funktion) und die Anfangsbedingungen $x_0 = (\xi_1, \xi_2)^T = x(0)$, so dass der Ausgang des Systems identisch Null ist.

Lösung:

Zuerst berechnet man die (Übertragungs)-Nullstellen durch die Lösung des verallgemeinerten Eigenwertproblems. Dazu bestimmt man zuerst die z_k so dass

$$\det \begin{pmatrix} z_k I - A & -B \\ -C & -D \end{pmatrix} = 0.$$

Daraus erhält man $z_k = 1$. Um die Anfangsbedingungen und das Eingangssignal zu bestimmen berechnet man den verallgemeinerten Eigenvektor zu $z_k = 1$. Man erhält

$$\begin{pmatrix} z_k I - A & -B \\ -C & -D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ u_k \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\xi_1 - \xi_2 = 0 \\ -\xi_1 + \xi_2 - u_k = 0 \\ -\xi_1 - \xi_2 = 0, \end{cases}$$

also $x_0 = \alpha(1, -1)^T$ und $u_k = -2\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Damit wählt man $u(t) = -2\alpha e^t h(t)$.

Aufgabe 2 Gegeben sei das System

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} x.$$

Berechnen Sie einen Zustandsregler $u(x)$ und die Anfangswerte $x_0 = x(0) \neq 0$, so dass der Ausgang identisch Null ist.

Lösung:

Das Vorgehen gleicht dem im nichtlinearen Fall, d.h. wir wollen den Ausgang identisch Null haben, also $y(t) \equiv 0$. Daraus folgt $y = 2x_2 + x_3 = 0$ und damit auch $y(0) = 2x_2(0) + x_3(0) = 0$. Zusammen mit y müssen auch die Zeitableitungen von y gleich Null sein. Nun gilt

$$\dot{y} = 2\dot{x}_2 + \dot{x}_3 = x_1 - 4x_2 + x_3 + 2u.$$

D.h. wir wählen $u = -\frac{1}{2}x_1 + 2x_2 - \frac{1}{2}x_3$. Zusammen mit einer Anfangsbedingung der Form $x_0 = (\alpha, \beta, -2\beta)$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ergibt sich $y(t) \equiv 0$.

Aufgabe 3 Gegeben sei das System

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2 + x_3 - u$$

$$\dot{x}_2 = x_1^3 + u$$

$$\dot{x}_3 = -x_3 + \gamma u, \quad \gamma \neq -1$$

$$y = x_1 + x_2.$$

a) Bestimmen Sie ein E/A-linearisierendes $u = \alpha(x) + \beta(x)v$.

Lösung:

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_1^3 + x_2 + x_3 \\ x_1^3 \\ -x_3 \end{bmatrix} \quad g(x) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$h(x) = x_1 + x_2$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = [1 \quad 1 \quad 0]$$

$$L_g h = 0$$

$$L_f h = -x_1^3 + x_2 + x_3 + x_1^3 = x_2 + x_3$$

$$\frac{\partial L_f h}{\partial x} = [0 \quad 1 \quad 1]$$

$$L_g L_f h = 1 + \gamma \neq 0 \Rightarrow r = 2$$

$$L_f^2 h = x_1^3 - x_3$$

$$u = \underbrace{\left(\frac{1}{1 + \gamma} \right)}_{\frac{1}{L_g L_f h}} \left(\underbrace{-x_1^3 + x_3}_{-L_f^2 h} + v \right)$$

b) Wählen Sie ein $u = \alpha(x) + \beta(x)\bar{v}$ so, dass die Pole des E/A-linearisierten Systems bei -1 und -2 liegen.

Lösung:

Das gewünschte charakteristische Polynom ist durch

$$p^2 + \beta_1 p + \beta_0 \stackrel{!}{=} (p+1)(p+2) = p^2 + 3p + 2$$

gegeben. Wir erhalten $\beta_1 = 3$ und $\beta_0 = 2$. Es soll also

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \bar{v}$$

gelten.

Mit der E/A-Linearisierung aus Aufgabenteil a) gilt

$$\ddot{y} = v,$$

wir wählen also

$$\begin{aligned} v &= -3\dot{y} - 2y + \bar{v} \\ &= -3L_f h - 2h + \bar{v}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$u = \frac{1}{1 + \gamma} \left(\underbrace{-x_1^3 + x_3}_{-L_f^2 h} - 3 \underbrace{(x_2 + x_3)}_{L_f h} - 2 \underbrace{(x_1 + x_2)}_h + \bar{v} \right),$$

was sich auch durch direktes Verwenden der Formel aus der Vorlesung ergibt.

- c) Bestimmen Sie $u(t)$ so, dass $y(t)$ dem Signal $y_{\text{ref}}(t) = \sin(t)$ asymptotisch folgt.

Lösung:

Wir wollen erreichen, dass die Dynamik des Fehlers $e(t) = y(t) - y_{\text{ref}}(t)$ asymptotisch stabil ist.

Es gilt $y_{\text{ref}}(t) = \sin(t)$, $\dot{y}_{\text{ref}}(t) = \cos(t)$ und $\ddot{y}_{\text{ref}}(t) = -\sin(t)$.

Die Ordnung der Fehlerdynamik entspricht des relativen Grades des Systems.

Wir wählen wieder das charakteristische Polynom

$$p^2 + \beta_1 p + \beta_0 \stackrel{!}{=} (p+1)(p+2) = p^2 + 3p + 2$$

und erhalten wieder $\beta_1 = 3$ und $\beta_0 = 2$.

Es soll also

$$\begin{aligned} \ddot{e}(t) + 3\dot{e}(t) + 2e(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\ddot{y}(t) + \sin(t)) + 3(\dot{y}(t) - \cos(t)) + 2(y(t) - \sin(t)) &= 0 \end{aligned}$$

gelten. Mit der E/A-Linearisierung aus Aufgabenteil a) gilt

$$\ddot{y} = v,$$

wir wählen also

$$\begin{aligned} v(t) &= -\sin(t) - 3(\dot{y}(t) - \cos(t)) - 2(y(t) - \sin(t)) \\ &= -\sin(t) - 3(L_g h(x(t)) - \cos(t)) - 2(h(x(t)) - \sin(t)) \end{aligned}$$

und damit

$$u(t) = \frac{1}{1+\gamma} \left(-x_1^3(t) + x_3(t) - \sin(t) - 3(x_2(t) + x_3(t) - \cos(t)) - 2(x_1(t) + x_2(t) - \sin(t)) \right).$$

- d) Ist dieses Vorgehen für alle $\gamma \neq -1$ sinnvoll?

Lösung:

Wir untersuchen die Nulldynamik:

$$\begin{aligned} y \equiv 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 &\Rightarrow x_1 = -x_2 \\ \dot{y} = 0 \Rightarrow \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 0 &\Rightarrow x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = -x_2 = x_1 \\ \ddot{y} = 0 \Rightarrow \dot{x}_2 + \dot{x}_3 = 0 &\Rightarrow x_1^3 - x_3 + (1+\gamma)u = 0 \Rightarrow u = \frac{1}{1+\gamma}(x_3 - x_1^3) \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Beziehungen in die rechte Seite der Differenzialgleichung ergibt sich dann für die Nulldynamik die Gleichung

$$\dot{\eta} = -\frac{1}{1+\gamma}\eta - \frac{\gamma}{1+\gamma}\eta^3.$$

Für $\gamma > -1$ ist die Nulldynamik lokal asymptotisch stabil und für $\gamma \geq 0$ ist die Nulldynamik global asymptotisch stabil. Das Vorgehen ist nur bei einer stabilen Nulldynamik sinnvoll. Für $\gamma < -1$ ist diese instabil.

Aufgabe 4 Zeigen Sie, dass sich der relative Grad eines Systemes $\dot{x} = f(x) + g(x)u$, $y = h(x)$ durch eine Zustandsrückführung $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ mit $\beta(x) \neq 0$ nicht ändern lässt.

Lösung:

Einsetzen der Rückführung ergibt

$$\dot{x} = \underbrace{f(x) + g(x)\alpha(x)}_{\tilde{f}(x)} + \underbrace{g(x)\beta(x)}_{\tilde{g}(x)} v.$$

Wir nehmen an, dass der relative Grad des Systems wohldefiniert und gleich r ist. Zuerst zeigt man per vollständiger Induktion, dass $L_{\tilde{f}}^k h(x) = L_f^k h(x)$ für alle $k \leq r-1$ gilt. Genauer, für $k=0$ gilt Definitionsgemäß

$$L_f^0 h = L_{\tilde{f}}^0 h.$$

Die Induktionsannahme lautet also, dass für ein k mit $k \leq r-2$ gilt $L_f^k h = L_{\tilde{f}}^k h$. Im Induktionsschluss gilt es nun zu zeigen das daraus folgt, dass $L_f^{k+1} h = L_{\tilde{f}}^{k+1} h$ gilt. Dies ergibt sich mit

$$\begin{aligned} L_{\tilde{f}}^{k+1} h(x) &= \frac{\partial L_{\tilde{f}}^k h(x)}{\partial x} \tilde{f}(x) \stackrel{\text{gem. Ind.-Annahme}}{=} \frac{\partial L_f^k h(x)}{\partial x} \tilde{f}(x) \\ &= \frac{\partial L_f^k h(x)}{\partial x} (f(x) + g(x)\alpha(x)) \\ &= \underbrace{\frac{\partial L_f^k h(x)}{\partial x} f(x)}_{L_f^{k+1} h(x)} + \frac{\partial L_f^k h(x)}{\partial x} g(x)\alpha(x) = L_f^{k+1} h(x) + \alpha(x) \underbrace{\frac{\partial L_f^k h(x)}{\partial x} g(x)}_{L_g L_f^k h(x)=0, \text{ da } k \leq r-2} = L_f^{k+1} h(x). \end{aligned}$$

Für $L_{\tilde{g}} L_{\tilde{f}}^k h(x)$ und $k \leq r-1$ ergibt sich dann

$$L_{\tilde{g}} L_{\tilde{f}}^k h(x) = \frac{\partial L_{\tilde{f}}^k h(x)}{\partial x} \tilde{g}(x) = \frac{\partial L_f^k h(x)}{\partial x} \underbrace{g(x)\beta(x)}_{L_g L_f^k h(x)} = L_g L_f^k h(x) \beta(x).$$

Weil $\beta(x) \neq 0$ wird klar, dass der relative Grad durch eine Zustandsrückführung nicht geändert wird.